

高等数学

北大版整理

2025 年 6 月 28 日

目录

写在最前面：一些公式	5
0.1 极限分析相关	5
0.1.1 $0^0 = 1$	5
0.1.2 Stirling 公式	5
0.2 三角函数相关	5
0.2.1 余弦等差数列求和	5
推论：三角级数求和中的常用界限	5
0.2.2 $\sin n, \cos n$ 的部分和问题	5
0.3 迪利克雷积分	5
0.4 微分积分相关	6
0.4.1 Wallis 公式	6
0.5 幂级数相关	6
0.5.1 $\ln n$ 的控制	6
第七章 重积分	8
7.1 重积分	8
7.1.1 积分中值定理	8
7.1.2 广义极坐标变换	8
7.1.3 重积分的计算	8
7.2 三重积分	9
7.2.1 三重积分的坐标系	9
柱坐标系	9
球坐标系	9
广义球坐标变换	9
7.2.2 三重积分的对称性	9
奇偶对称性	9
轮换对称性	10
第八章 曲线和曲面积分	11
8.1 对弧长的曲线积分（第一型曲线积分）	11
8.1.1 平面第一型曲线积分	11
8.1.2 空间第一型曲面积分	12

8.2	对坐标的曲线积分 (第二型曲线积分)	12
8.2.1	第二型曲线积分的计算	12
8.3	Green 公式·平面第二型曲线积分与路径无关的条件	12
8.3.1	Green 公式	12
8.3.2	平面第二型曲线积分与路径无关的条件	13
8.4	第一型曲面积分	13
8.5	第二型曲面积分: 通量	14
8.6	Gauss 公式·Stokes 公式	15
8.6.1	Gauss 公式	15
8.6.2	Stokes 公式	16
8.7	不要求的内容	16
8.7.1	梯度、旋度、散度	16
8.7.2	Boincare 引理	17
8.7.3	广义 Stokes 公式	17
第九章	常微分方程	18
9.1	微分方程与初等积分法	18
9.1.1	微分方程	18
9.1.2	分离变量	18
9.1.3	一阶线性微分方程	18
	常数变易法	19
9.1.4	全微分方程 (恰当方程)	19
9.1.5	可降阶的二阶微分方程	20
9.2	一阶微分方程解的存在唯一性定理	20
9.2.1	皮卡序列	20
9.2.2	皮卡逐次逼近法	21
9.3	高阶线性微分方程	21
9.3.1	函数组的线性相关与线性无关	21
9.3.2	二阶线性微分方程	22
	二阶线性微分方程解的存在唯一性定理	22
	二阶线性齐次方程通解的结构	22
	二阶线性方程通解的结构	22
9.4	二阶线性常系数微分方程	22
9.4.1	线性常系数齐次方程	22
9.4.2	线性常系数非齐次方程	23
	待定系数法解三类非齐次方程	23
9.5	常数变易法与欧拉方程	23
9.5.1	常数变易法	24
9.5.2	欧拉方程	24

第十章	无穷级数	25
10.1	Cauchy 收敛原理与数项级数的概念	25
10.1.1	Cauchy 收敛原理	25
10.1.2	无穷级数	25
10.1.3	级数的性质	26
10.2	正项级数的审敛法	26
10.2.1	正项级数收敛的必要条件	26
10.2.2	正项级数收敛的充要条件	26
10.2.3	正项级数收敛的比较原理	27
	作差: 原始形式	27
	作商: 极限形式	27
10.2.4	等比级数	27
10.2.5	d'Alembert 判别法 (比值判别法)	27
10.2.6	Cauchy 判别法 (根判别法)	27
10.2.7	p-级数	28
10.2.8	拉比判别法	28
10.2.9	积分判别法	28
10.3	交错级数	29
10.3.1	Leibniz 判别法	29
10.3.2	绝对收敛与条件收敛	29
10.4	狄利克雷判别法与阿贝尔判别法	29
10.4.1	Dirichlet's Test	29
10.4.2	Abel's Test	30
10.5	函数项级数与一致收敛	30
10.5.1	函数项级数	31
10.5.2	一致收敛的基本概念	31
10.5.3	一致收敛的判别方法	31
	必要条件	31
	Cauchy 准则 (充要条件)	31
	魏尔斯特拉斯 M 判别法 (强判别法)	31
	狄利克雷判别法 (适用于乘积型)	31
	阿贝尔判别法	32
10.5.4	一致收敛的性质	32
	连续性传递	32
	逐项积分 (求和和积分可交换性)	32
	逐项求导	32
10.6	幂级数	32
10.6.1	收敛半径与收敛区间	32

收敛半径定理	32
收敛半径的计算方法	33
10.6.2 幂级数的运算性质	33
四则运算	33
一致收敛	33
连续性	33
10.6.3 幂级数的可积性与可微性	33
10.6.4 Taylor 级数	33
第十一章 广义积分与含参积分	34
11.1 无穷积分与瑕积分	34
11.1.1 无穷积分	34
11.1.2 瑕积分	34
11.1.3 审敛法	34
11.2 含参变量的正常积分	34
11.2.1 积分、极限的次序交换	35
11.2.2 积分下求导	35
变限积分情形	35
11.3 含参变量的广义积分	35
11.4 Γ 和 B 函数	35
11.4.1 Γ 函数	35
性质	35
11.4.2 B 函数	35
性质	35
第十二章 傅里叶级数	37
12.1 为什么要傅里叶展开	37
12.2 傅里叶展开条件与方法	37
12.2.1 傅里叶展开条件	37
12.2.2 傅里叶展开方法	37
奇偶函数的简化	38
12.3 贝塞尔不等式和帕塞瓦尔等式的意义	38

写在最前面：一些公式

更多参见高等数学常用公式.

0.1 极限分析相关

0.1.1 $0^0 = 1$

在大多数数学约定中, $0^0 = 1$.

0.1.2 Stirling 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \quad (1)$$

用来对付带 $n!$ 的级数有奇效, 最暴力的一集.

0.2 三角函数相关

0.2.1 余弦等差数列求和

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kd) = \frac{\sin\left(\frac{nd}{2}\right) \cdot \cos\left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right)}{\sin\left(\frac{d}{2}\right)} \quad (2)$$

推论：三角级数求和中的常用界限

$$\left| \sum_{n=1}^n \cos(n\theta) \right| \leq \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| \quad (3)$$

0.2.2 $\sin n, \cos n$ 的部分和问题

$$\sum_{n=1}^N \sin n = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^N \cos n = \frac{\cos\left(\frac{N}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (5)$$

0.3 迪利克雷积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, y > 0 \\ 0, y = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, y < 0 \end{cases} \quad (6)$$

0.4 微分积分相关

0.4.1 Wallis 公式

注意积分区域是 $\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \quad (7)$$

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{若 } n \text{ 是偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{若 } n \text{ 是奇数} \end{cases} \quad (8)$$

一个更好记的版本（点火公式）：

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{若 } n \text{ 是偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & \text{若 } n \text{ 是奇数} \end{cases} \quad (9)$$

这个公式会被后续内容频繁使用。对于更多推论，建议使用数形结合的方式理解。

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot 2\pi, & \text{若 } n \text{ 是偶数} \\ 0, & \text{若 } n \text{ 是奇数} \end{cases} \quad (10)$$

对于偶数的 n ， $f(x)$ 为 $\cos(x)$ 或 $\sin(x)$ 皆可：

$$\int_0^{2\pi} f^n(x) \, dx = 2 \int_0^{\pi} f^n(x) \, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n(x) \, dx \quad (11)$$

0.5 幂级数相关

0.5.1 $\ln n$ 的控制

当 $n \rightarrow \infty$, $n^\varepsilon > \ln n, \varepsilon > 0$.

在正项级数也可以使用柯西稠密判别法：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n} \text{ 收敛} \quad (12)$$

把 $\ln n$ 变成 $n \ln 2$.

第七章 重积分

考纲

1. 理解重积分的概念，能熟练掌握二重积分的计算法（直角坐标、极坐标）掌握三重积分的计算法（直角坐标、柱坐标、球坐标）

重点：

1. 重积分的概念，重积分的计算方法。

难点：

1. 二重积分、三重积分化为累次积分的方法。

7.1 重积分

一个在有界闭区间上连续的二元函数是可积的.

7.1.1 积分中值定理

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(x_0, y_0) S_D \quad (13)$$

7.1.2 广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{其中, 伸缩因子: } J = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & b \sin \theta \\ -ar \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$$

注意，所有的雅可比行列式在放入还原后的函数里时都取绝对值，所以次序不重要.

7.1.3 重积分的计算

原始形式 $\rightarrow$ 累次积分 $\rightarrow$ 定积分 $\rightarrow$ 答案

减轻计算量/遇到困难的治疗方法：

1. 更改积分次序，错误的次序有时候甚至积不出来
2. 换元：让被积函数/积分区域更利于计算
3. 利用对称性
4. 感到困惑时，画图

7.2 三重积分

7.2.1 三重积分的坐标系

柱坐标系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z \end{cases} \quad (15)$$
$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = r$$

球坐标系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \text{ 格外注意 } 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (16)$$
$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \theta, r)} = r^2 \sin \varphi$$

广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \sin \varphi, \\ y = br \sin \theta \sin \varphi, \text{ 格外注意 } 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = cr \cos \varphi \end{cases} \quad (17)$$
$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \theta, r)} = abcr^2 \sin \varphi$$

7.2.2 三重积分的对称性

奇偶对称性

$xOy \rightarrow z, xOz \rightarrow y, yOz \rightarrow x$.

从积分区域出发, 以其关于面 xOy 对称为例:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) = \begin{cases} 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数} \\ 2, & \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数} \end{cases} \quad (18)$$

如

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x &= \iiint_{\Omega} y = 0, \\ \iiint_{\Omega} xy &= 0, \\ \iiint_{\Omega} xyz &= 0\end{aligned}\tag{19}$$

只要满足相应的对称条件，如 $f(x, y, z) = f(-x, y, z)$ 那么便为 0.

轮换对称性

积分区域对称轴： $x = z, x = y, y = z$.

以积分区域关于 $x = y$ 对称为例：

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) = \iiint_{\Omega} f(y, x, z)\tag{20}$$

第八章 曲线和曲面积分

考纲

1. 理解两类曲线积分的概念，能借助曲线的参数方程将它们化为定积分。
2. 理解两类曲面积分的概念，会计算两类曲面积分。
3. 理解并熟练掌握格林公式，会运用平面上曲线积分与路径无关的条件简化积分的计算。
4. 掌握高斯公式，了解斯托克斯公式。
5. 了解梯度、散度、旋度的概念。（疑似不讲）

重点：

1. 两类曲线积分与两类曲面积分的概念以及它们的计算方法。
2. 格林公式、高斯公式以及 Stokes 公式。
3. 曲线积分与路径无关的条件。

难点：

1. 曲线积分与曲面积分的计算，格林公式，高斯公式。

所有的重积分、曲线（面）积分、广义积分最后都会变成定积分。

8.1 对弧长的曲线积分（第一型曲线积分）

定义：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) ds_i \quad (21)$$

若 Eq. 21 在曲线 L 上存在，则函数在 L 上可积。

8.1.1 平面第一型曲线积分

$$\int_L f(x, y) ds = \int_L f(t) ds \quad (22)$$

由弧微分相关知识， $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ ，则有：

$$\int_L f(x, y) ds = \int_L f(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_L f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (23)$$

值得注意的是，换元后的积分上下限一定要满足**严格的大小关系**，这样才能表示长度的实际意义。

8.1.2 空间第一型曲面积分

$$\text{对曲线 } L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta \\ z = z(t) \end{cases} \quad (24)$$

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_L f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

8.2 对坐标的曲线积分（第二型曲线积分）

第二型曲线积分的概念从物理的需求而来，是有向的。

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\int_{\overrightarrow{AB}} F(x, y, z) d\vec{r} = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (25)$$

8.2.1 第二型曲线积分的计算

第二型曲面积分在某些条件下可以转换为第一型曲面积分。

考虑 $L: \begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \alpha \leq t \leq \beta, \\ z=z(t) \end{cases}$ 有切向量 $(x'(t), y'(t), z'(t))$ 。

令 $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ ，有单位法向量：

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{x'(t)}{ds}, \frac{y'(t)}{ds}, \frac{z'(t)}{ds} \right) \quad (26)$$

则原来的第二型曲线积分可以写为：

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma ds \quad (27)$$

这样就能变成第一型曲线积分进行计算。

8.3 Green 公式·平面第二型曲线积分与路径无关的条件

若尔当定理：一个 R^2 空间内的简单闭曲线（若尔当曲线）会将空间分为两部分。

内侧：被曲线围起来的部分为曲线的内侧、其余部分为外侧。

正方向：前进方向的左侧为内侧的方向为正方向（逆时针）。

8.3.1 Green 公式

Green 公式是 Stokes 公式在 R^2 空间的特例：

$$\oint_{L^+} P dx + Q dy = \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right| \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (28)$$

其中 D 是被 L 围起来的闭区域.

D 可以是单连通区域, 也可以是多联通区域 (可以看作多个单连通区域相加), 但是不能有 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 不存在连续一阶偏导数的点.

遇到这样的点时, 我们要将其挖去, 以第二型曲线积分的方式计算这些点, 然后相加.

同时, 我们也有可能遇到**不封闭的曲线**, 需要我们手动拼凑, 在运用 Green 公式后减去/加上相应的曲线积分.

8.3.2 平面第二型曲线积分与路径无关的条件

下面有三个彼此等价的条件:

$$D \text{ 内任意一条逐段光滑闭曲线 } C, \text{ 满足 } \oint_{C^+} P dx + Q dy = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (30)$$

$$P dx + Q dy \text{ 恰好是某个函数的全微分} \quad (31)$$

都是平面第二型曲线积分与路径无关的充要条件.

可以把积分还原 (找到原函数) 再计算.

8.4 第一型曲面积分

曲面的质量、质心、转动惯量问题引入了第一型曲面积分.

它同样也是对坐标的积分.

第一型曲面积分的计算, 需要设法把它转化为重积分.

对于曲面 $S: z = g(x, y), (x, y) \in D$, 我们有:

$$\iint_S f(x, y, g(x, y)) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} d\sigma \quad (32)$$

这是我们的简单计算方法.

下面是面对多变量又臭又长的公式:

当曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), (u, v) \in D \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (33)$$

给出时,

面 S 的法向量:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = Ai + Bj + Ck \quad (34)$$

$$\text{其中 } A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

则

$$|\cos \gamma| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| |\vec{k}|} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (35)$$

$$dS = \frac{d\sigma}{\cos \gamma} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|} d\sigma$$

又由雅可比得:

$$d\sigma = |J| du dv = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv = |C| du dv \quad (36)$$

则有:

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \quad (37)$$

为了方便计算, 不妨令:

$$\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{cases} \quad (38)$$

$$\text{则 } \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

最终得到:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (39)$$

在我们的努力下, 第一型曲面积分变成了重积分.

8.5 第二型曲面积分: 通量

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (40)$$

利用投影的思想, 转换为第一型曲面积分:

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{S^+} P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma dS \quad (41)$$

其中

$$\begin{aligned} & \text{当 } z = f(x, y), \\ & \cos \gamma \text{ 决定正负} \\ & (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\pm 1}{|dS|} (-f_x, -f_y, 1) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \text{当 } y = g(x, z), \\ & \cos \beta \text{ 决定正负} \\ & (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\pm 1}{|dS|} (-g_x, 1, -g_z) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \text{当 } x = h(y, z), \\ & \cos \alpha \text{ 决定正负} \\ & (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\pm 1}{|dS|} (1, -h_y, -h_z) \end{aligned} \quad (44)$$

在 Eq. 42 Eq. 43 Eq. 42 中, ± 1 的符号由面的方向决定: 若曲面朝向与坐标轴正轴方向相同, 保留原符号, 否则取反.

这样 Eq. 41 (以 $z = f(x, y)$ 为例) 就可以写为:

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma dS &= \pm \iint_D (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) |dS| d\sigma \\ &= \pm \iint_D P(-f_x) + Q(-f_y) + R d\sigma \end{aligned} \quad (45)$$

我们发现了一条 第二型曲面积分 $\rightarrow$ 第一型曲面积分 $\rightarrow$ 重积分 的道路.

8.6 Gauss 公式·Stokes 公式

8.6.1 Gauss 公式

Gauss 公式可以看作牛顿-莱布尼兹公式在高维的推广: 将第二型曲面积分化为三重积分.

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dV \quad (46)$$

值得注意的是, S 必须是分片光滑的封闭曲线, 同时 P, Q, R 在 $S \cup \Omega$ 上有连续一阶偏导数, 当不满足使用条件时, 我们需要挖去/增加第二型曲面积分的范围, 即配凑.

必须是第二型曲面积分!

自此, 我们实现了闭合曲面及被闭合曲面包裹的空间闭区域的积分区域转换.

8.6.2 Stokes 公式

Stokes 公式是 R^3 空间上的 Green 公式, 将第二型曲线积分转换为第二型曲面积分.

$$\oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S^+} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (47)$$

将边界曲线积分转换成曲面闭区域积分.

小结: 自此我们实现了闭合曲线和曲面的转化, 闭合曲面和闭空间的转化.

8.7 不要求的内容

不在考纲内.

8.7.1 梯度、旋度、散度

梯度是数量场 (零次外微分) 求微分的产物:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \\ \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (48)$$

旋度是一次外微分求微分的产物:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = P dx + Q dy + R dz \\ \text{rot } f = \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

散度是二次外微分求微分的产物:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \\ \text{div } f = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (50)$$

在 R^3 空间内, 三次外微分求微分求微分的结果为 0:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= H dx \wedge dy \wedge dz \\ df &= 0 \end{aligned} \tag{51}$$

8.7.2 Boincare 引理

若 ω 为一外微分形式，则 $d d\omega = 0$.

即梯度无旋，旋度无散：

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \nabla f &= 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} f &= 0 \end{aligned} \tag{52}$$

Boincare 引理的逆运用：若 ω 为一外微分形式，则 $d\omega = 0$ ，则存在 ω 的母函数.

8.7.3 广义 Stokes 公式

外微分统一了牛顿-莱布尼兹、Green、Stokes、Guess 公式：

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega \tag{53}$$

我们称 Eq. 53 为广义 Stokes 公式，可以看作高维的微积分基本定理.

第九章 常微分方程

考纲

1. 理解微分方程, 解, 通解, 初始条件, 特解等概念。
2. 熟练掌握初等积分法求解一阶微分方程。
3. 理解线性微分方程通解的结构, 熟练掌握二阶线性常系数齐次方程的解法。
4. 掌握非齐次项为多项式, 指数函数, 正弦函数, 余弦函数形式的二阶线性常系数非齐次方程的解法。

重点:

1. 变量可分离的方程、齐次方程、一阶线性微分方程、伯努利方程、全微分方程。
2. 常数变易法。线性微分方程解的结构, 二阶线性常系数齐次与非齐次方程的解法。

难点:

1. 可降阶的一些高阶方程的降阶解法。线性微分方程通解的结构及解法。

9.1 微分方程与初等积分法

9.1.1 微分方程

任何的微分方程都可以表达为下面的形式:

$$F(x, \varphi(x)', \varphi''(x), \dots, \varphi^n(x)) = 0 \quad (54)$$

微分方程的定义: 凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间关系的方程叫做微分方程。

微分方程的阶: 依最高阶导数决定, 如 Eq. 54 里面的 $\varphi^{n(x)}$ 决定了该方程为 n 阶。

微分方程的通解: 如果方程的一个解 $\varphi_1(x)$ 含有常数, 常数的内容是任意的, 常数的数目是与方程阶数相同的, 则称这样的解是方程的通解。

将这些常数固定下来, 我们需要**初值条件**, 解出常数 C_1, C_2

9.1.2 分离变量

$$y' = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad (55)$$

通过换元, 能够让部分微分方程变成变量分离的形式。

9.1.3 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (56)$$

当 $Q(x) \equiv 0$ 称一阶线性齐次微分方程.

性质：一阶线性齐次微分方程的通解就是它的所有解.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P(x)y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= -P(x) dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int -P(x) dx \\ \ln y &= \int -P(x) dx + C \\ y &= e^{-\int P(x) dx + C} = Ce^{-\int P(x) dx} \end{aligned} \quad (57)$$

常数变易法

对于 $Q(x) \neq 0$ 的一阶线性微分方程，我们令解 $y = ue^{-\int P(x) dx}$ 带回 Eq. 56 得到：

$$\begin{aligned} u'e^{-\int P(x) dx} - P(x)ue^{-\int P(x) dx} + P(x)ue^{-\int P(x) dx} &= Q(x) \\ u'e^{-\int P(x) dx} &= Q(x) \\ du &= Q(x)e^{\int P(x) dx} dx \\ u &= \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx \end{aligned} \quad (58)$$

故 $y = ue^{-\int P(x) dx} = e^{-\int P(x) dx} \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx$.

性质：线性非齐次方程的通解 = 对应的线性齐次方程的通解 + 该方程的一个特解.

通过换元，能够使一些非线性方程变成线性方程：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P(x)y &= Q(x)y^\alpha (\alpha \neq 0, 1 \text{ 且为任意常数}) \\ \frac{dy}{dx}y^{-\alpha} + P(x)y^{1-\alpha} &= Q(x) \\ \text{令 } z &= y^{-\alpha+1} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

非线性的常微分方程，还可能存在奇解.

9.1.4 全微分方程（恰当方程）

当 $u(x, y)$ 在区域 D 上可微，有全微分方程：

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

$$\text{其中 } P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (60)$$

在第八章验证第二型曲线积分是否与路径无关的条件:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (61)$$

恰好是 $u(x, y)$ 存在且可微的充要条件, 在这里也能用来验证一个方程是否是全微分方程.

积分因子

9.1.5 可降阶的二阶微分方程

下面介绍两类可以通过变量替换降阶的二阶微分方程.

第一类: 不含未知函数 y 的方程

$$F(x, y', y'') = 0 \quad (62)$$

解法:

$z = y'$ 化为一阶, 得到通微分 $\Phi(x, z, C_1) = 0$.

此时再次求解 $\Phi\left(x, \frac{dz}{dx}, C_1\right) = 0$ 即可.

第二类: 不含自变量 x 的方程

$$F(y, y', y'') = 0 \quad (63)$$

$$z = y',$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy} \quad (64)$$

$$\Rightarrow F\left(y, z, z \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

化为第一类继续求解.

9.2 一阶微分方程解的存在唯一性定理

9.2.1 皮卡序列

$f(x, y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件, 即:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

L 是一个确切的常数

(65)

对于柯西问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ f(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (66)$$

倘若 $f(x, y)$ 在 $\{(x, y) | |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ 上连续且关于 y 满足 Lipschitz 条件, 则方程 Eq. 66 的解在 $|x - x_0| \leq h$ 上存在且唯一.

此处 h 是又一个常数: $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M = \max\{f(x, y)\}$.

满足这个条件的方程, 也称**皮卡方程**.

9.2.2 皮卡逐次逼近法

对于如 Eq. 66 的柯西问题, 可以转化为等价的积分方程:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (67)$$

将 y_0 带入 $f(x, y)$ 的 y 我们得到:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \\ y_2 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \\ &\dots \\ y_n &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \end{aligned} \quad (68)$$

最终我们得到一个级数作为近似解: $y = \sum_{i=1}^n y_i$

结果会长得像 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒展开.

9.3 高阶线性微分方程

形如:

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}P_1(x) + y^{(n-2)}P_2(x) + \dots + yP_n(x) = f(x) \quad (69)$$

的方程称为 n 阶线性微分方程.

9.3.1 函数组的线性相关与线性无关

若能够找到不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得方程组 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 满足:

$$\sum_{i=1}^n k_i \varphi_i(x) \equiv 0 \quad (70)$$

则称 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性相关, 反之则称线性无关.

9.3.2 二阶线性微分方程

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = f(x), x \in [a, b] \quad (71)$$

二阶线性微分方程解的存在唯一性定理

若 $f(x), p(x), q(x)$ 于 $[a, b]$ 连续 则 Eq. 71 在 $[a, b]$ 存在唯一解.

此外, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上**线性相关**的充要条件是它们所确定的 Wronski 行列式为 0:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi_1(x), \varphi_2(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上线性相关} \quad (72)$$

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0, x \in [a, b] \quad (73)$$

对于齐次微分方程 Eq. 73, $\exists x_0 \in [a, b], W(x_0) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], W(x) \equiv 0$.

二阶线性齐次方程通解的结构

若 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 为 Eq. 73 的两个解, 那么它们的任意一个线性组合也是 Eq. 73 的解:

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) \quad (74)$$

二阶线性方程通解的结构

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \varphi^*(x) \quad (75)$$

我们将会在后面讨论如何求出特解 $\varphi^*(x)$.

上述情况可以推广到 n 阶.

9.4 二阶线性常系数微分方程

9.4.1 线性常系数齐次方程

考虑:

$$y'' + py' + qy = 0, \text{ 其中 } p, q \text{ 为给定的常数} \quad (76)$$

考虑解为 $y = e^{\lambda x}$ 带入 Eq. 76 得到:

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \quad (77)$$

由于 $y = e^{\lambda x} \neq 0$ 则 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 这个方程在复数域上有两个根.

下面我们给出特征根 λ 与对于的二阶线性常系数齐次方程 Eq. 76 的关系:

特征根	通解形式
两相异实根 λ_1, λ_2	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
二重根	$(C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$
共轭复根 $\lambda = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

推广到 n 重:

特征根	对应的通解
单实根 λ	$e^{\lambda x}$
n 重根 λ	$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{n-1} e^{\lambda x}$
一对共轭复根 $\lambda = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
n 重共轭复根 $\lambda = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{n-1} e^{\alpha x}, x^{n-1} \sin \beta x$

9.4.2 线性常系数非齐次方程

接下来让我们讨论特解，但是很不幸的是我们只能解出其中的一小部分。

待定系数法解三类非齐次方程

若 f 是一个	则形式为
次数为 n 的多项式 例, $f(x) = 7$ $f(x) = 3x - 2$ $f(x) = 10x^2$ $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 22$	$y_P =$ 次数为 n 的一般多项式 $y_P = a$ $y_P = ax + b$ $y_P = ax^2 + bx + c$ $y_P = ax^3 + bx^2 + cx + d$
指数 e^{kx} 的倍数 例, $f(x) = 10e^{-4x}$ $f(x) = e^x$	$y_P = C e^{kx}$ $y_P = C e^{-4x}$ $y_P = C e^x$
$\cos(kx)$ 的倍数 + $\sin(kx)$ 的倍数 例, $f(x) = 2 \sin(3x) - 5 \cos(3x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = 2 \sin(11x)$	$y_P = C \cos(kx) + D \sin(kx)$ $y_P = C \cos(3x) + D \sin(3x)$ $y_P = C \cos(x) + D \sin(x)$ $y_P = C \cos(11x) + D \sin(11x)$
上面某些形式的和或积 例, $f(x) = 2x^2 + e^{-6x}$ $f(x) = 2x^2 e^{-6x}$ $f(x) = 7e^{2x} \sin(3x)$ $f(x) = \cos(2x) + 6 \sin(x)$ $f(x) = 4x \cos(3x)$	这些形式的和或积 (若为积, 删掉一个常数) $y_P = ax^2 + bx + c + C e^{-6x}$ $y_P = (ax^2 + bx + c) e^{-6x}$ $y_P = (C \cos(3x) + D \sin(3x)) e^{2x}$ $y_P = C \cos(2x) + D \sin(2x) + E \cos(x) + F \sin(x)$ $y_P = (x + b)(C \cos(3x) + D \sin(3x))$
若 y_P 与 y_H 冲突, 令特解的形式乘以 x 或 x^2	

9.5 常数变易法与欧拉方程

9.5.1 常数变易法

设齐次通解为 $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

设非齐次特解为: $y = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$

代入原方程并构造:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad (78)$$

解出 $u_1', u_2' \Rightarrow$ 积分得 u_1, u_2

9.5.2 欧拉方程

形式:

$$a_0 x^n y^n + a_1 x^{n-1} y^{n-1} + \dots + a_n y = 0 \quad (79)$$

换元:

$$x = e^t \text{ 带入 } y(x) \Rightarrow y(t), \text{ 化为常系数微分方程} \quad (80)$$

第十章 无穷级数

考纲

1. 理解级数收敛与发散的概念。
2. 了解级数收敛的必要条件。
3. 熟练掌握正项级数的比值审敛法，根值审敛法。
4. 熟悉等比级数与 P-级数的敛散性。
5. 掌握任意项级数的绝对收敛及条件收敛。
6. 理解函数项级数一致收敛概念及其判别方法。
7. 熟练掌握幂级数收敛域及其和函数的求法，知道幂级数在其收敛区间内的基本性质。
8. 掌握将函数展开为幂级数的方法。

重点：

1. 数项级数的敛散性判别法。幂级数的和函数求法以及常用函数的幂级数展开式。

难点：

1. 级数敛散性判别法，绝对收敛，条件收敛及一致收敛概念，展开函数为幂级数。

10.1 Cauchy 收敛原理与数项级数的概念

如何证明一个数列有极限？

10.1.1 Cauchy 收敛原理

对于数列 $\{a_n\}$ ，若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 都存在 N 使得：

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, @ \text{ 只要 } n, m \geq N \quad (81)$$

在无须知道极限是什么的条件下，只须依据序列本身的性态就可判断它是否有极限。

对于函数，我们有：

$$|f(n) - f(m)| < \varepsilon, @ \text{ 只要 } |n - a| < \sigma, |m - a| < \sigma \quad (82)$$

10.1.2 无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (83)$$

其中 a_n 称为通项， $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 称为部分和。

若部分和有极限 S , 则称级数收敛, 且 S 为该极限和.

由于 $a_n = S_n - S_{n-1}$ (约定 $S_0 = 0$), 有如下定理:

$$a_k \rightarrow 0, \text{ 当 } k \rightarrow \infty \text{ 是 } \sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ 收敛的必要条件} \quad (84)$$

例子: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的通项趋于零, 但是发散.

我们还有第二个必要条件:

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 都存在 N 使得

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon, n \geq N, p > 1 \quad (85)$$

是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 收敛的必要条件

其中 $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$ 可以改写为 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

通项趋于零的速度达到一定程度, 就能够保证级数的收敛性.

10.1.3 级数的性质

1. 级数满足线性运算的规律: 可加可乘.
2. 在级数前面添加上有限项或删除掉有限项, 所成的新级数与原级数同时收敛或发散.
3. 将收敛级数的项任意加括号后所成的新级数, 仍然收敛到原级数的和 (此性质称为无穷和的结合律).

但是有些时候原级数并不收敛, 添上括号后就收敛.

10.2 正项级数的审敛法

10.2.1 正项级数收敛的必要条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (86)$$

10.2.2 正项级数收敛的充要条件

由于 $\{a_n\}$ 中 a_n 非负, 则 S_n 单调递增.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ 有界} \quad (87)$$

由第一章我们就学过的单调有界原理, 只需要证明 $\{S_n\}$ 有上界, 就能判定正项级数收敛.

10.2.3 正项级数收敛的比较原理

作差：原始形式

有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$, 当 i 足够大, 若 $a_i \geq b_i$:

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ 收敛
2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 发散

作商：极限形式

有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = h$:

1. 若 $0 \leq h < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 收敛
2. 若 $0 < h \leq +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 发散

当 $0 < h < +\infty$ 两者敛散性同步, 此时这两个级数是“同阶”的.

10.2.4 等比级数

我们称:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_0 r^n = \begin{cases} \text{收敛 when } |p| < 1, \\ \text{发散 when } |p| \geq 1 \end{cases} \quad (88)$$

为等比级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_0 r^n = q_0 \frac{1}{1-q} \quad (89)$$

下面我们介绍的比值判别法和根判别法基于它.

10.2.5 d'Alembert 判别法 (比值判别法)

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad (90)$$

则:

- 当 $l < 1$ 级数收敛
- 当 $l > 1$ 级数发散
- 当 $l = 1$ 无法通过该方法判断

10.2.6 Cauchy 判别法 (根判别法)

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l \quad (91)$$

则:

- 当 $l < 1$ 级数收敛
- 当 $l > 1$ 级数发散
- 当 $l = 1$ 无法通过该方法判断

达朗贝尔判别法 (比值判别法) 和柯西判别法只适用于:

$$a_k < cq^n, @n \geq N > 0, 0 < q < 1 \quad (92)$$

的情况.

10.2.7 p-级数

我们称:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛 when } p > 1, \\ \text{发散 when } p \leq 1 \end{cases} \quad (93)$$

为 **p-级数**. 下面我们介绍的拉比判别法基于它.

10.2.8 拉比判别法

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ 满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = R, R \text{ 可以是 } +\infty \quad (94)$$

则:

- 当 $R > 1$ 级数收敛
- 当 $R < 1$ 级数发散
- 当 $l = 1$ 无法通过该方法判断

拉比判别法的极限值 R 本质上是在估算 p 值, $a_n \sim \frac{1}{n^p}$.

10.2.9 积分判别法

定义函数 $f(x)$:

- $f(n) = a_n$
- $f(x)$ 单调递减
- $f(x)$ 在 $[1, \infty]$ 连续

则:

$$\text{正项级数 } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 收敛} \Leftrightarrow \text{不定积分 } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \quad (95)$$

10.3 交错级数

形如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 或者 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 的级数称为交错级数（其中 $a_n > 0$ ）。

10.3.1 Leibniz 判别法

对于：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (96)$$

只要满足：

- 单调递减： $a_n > a_{n+1}$
- 逐项趋 0： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

则级数收敛。

莱布尼茨判别法只能用于判断条件收敛，即交错形式是否收敛，不判断绝对收敛。

10.3.2 绝对收敛与条件收敛

下面是简单的对比：

- **绝对收敛**：若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定收敛，此时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛。
- **条件收敛**：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛。

例子：

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} & \text{ 条件收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} & \text{ 绝对收敛} \end{aligned} \quad (97)$$

10.4 狄利克雷判别法与阿贝尔判别法

狄利克雷判别法（Dirichlet's Test）和阿贝尔判别法（Abel's Test）是用于判断乘积型数列级数收敛性的两种经典审敛法，特别适用于一些难以用常规判别法处理的交错或震荡型级数。

10.4.1 Dirichlet's Test

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (98)$$

若满足以下两个条件：

- 部分和有界： $S_a(x) = \sum_{k=0}^n a_k$ 有界
- b_n 单调 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

$\{a_n\}$ 累加后波动不大, $\{b_n\}$ 趋于零并且单调, 就能“抑制”住波动, 实现收敛。

例子： $\sum \sin n$ 的有界性

$$S(N) = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\right) \sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (99)$$

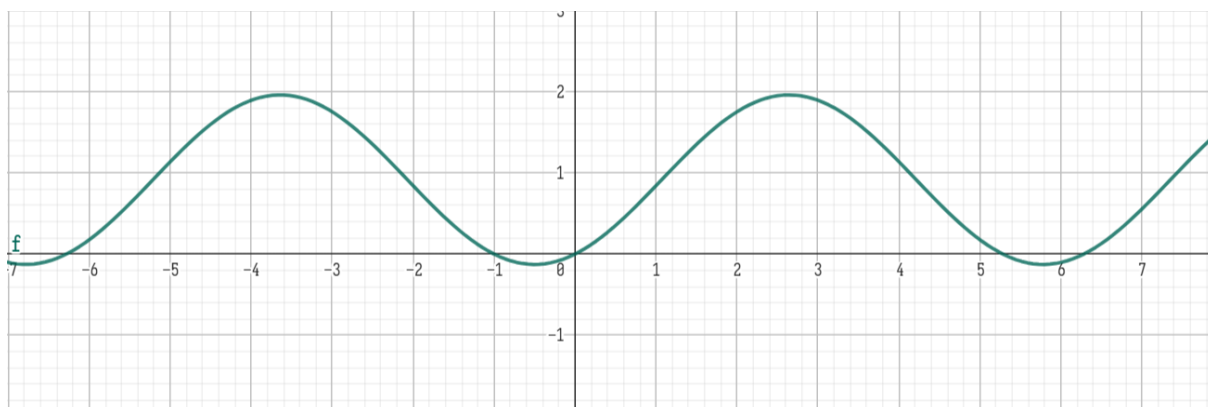


图 1 可以看到, 它在 $[-1, 1]$ 震荡

10.4.2 Abel's Test

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (100)$$

若满足以下两个条件：

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- $\{b_n\}$ 单调且有界

阿贝尔判别法通常配合收敛数列与单调有界数列使用, 可以看作是狄利克雷判别法的一个补充或变形.

10.5 函数项级数与一致收敛

10.5.1 函数项级数

函数项级数是由函数组成的无穷级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (101)$$

$u_n(x)$ 是某个集合 D 上的函数.

若 $x_0 \in D$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 为收敛点.

全体收敛点构成收敛域 X , 其极限函数 $S(x) = \sum u_n(x)$.

10.5.2 一致收敛的基本概念

TODO: 这玩意太抽象了

10.5.3 一致收敛的判别方法

必要条件

通项一致趋于 0, 一个必要条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 在 } X \text{ 上一致收敛} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0 \quad (102)$$

Cauchy 准则 (充要条件)

任意段和一致小于 ε :

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得对任意 $n > N, p \in N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (103)$$

魏尔斯特拉斯 M 判别法 (强判别法)

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且:

$$|u_n(x)| \leq a_n, \forall x \in X \quad (104)$$

则 $u_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

狄利克雷判别法 (适用于乘积型)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \quad (105)$$

若满足以下两个条件:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 部分和一致有界
- $b_n(x)$ 单调 且一致趋于 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 一致收敛.

阿贝尔判别法

若 $\{a_n(x)\}$ 单调且一致有界, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ 一致收敛.

10.5.4 一致收敛的性质

连续性传递

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛 且每一项连续, 则和函数连续.

逐项积分 (求和和积分可交换性)

$$\sum \int u_n(x) dx = \int \sum u_n(x) dx \quad (106)$$

逐项求导

$$\sum u_n'(x) = \left(\sum u_n(x) \right)' \quad (107)$$

且导函数连续.

10.6 幂级数

幂级数是多项式的推广:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (108)$$

a_n 是常数, 称为系数; x_0 是中心.

10.6.1 收敛半径与收敛区间

幂级数要么仅在一一点 x_0 收敛, 要么在以 x_0 为中心, 半径为 R 的开区间上收敛.

至于求收敛域, 端点需要另外讨论.

收敛半径定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \begin{cases} \text{绝对收敛, 若 } |x-x_0| < R \\ \text{发散, 若 } |x-x_0| > R \\ \text{不能确定, 若 } |x-x_0| = R \end{cases} \quad (109)$$

收敛半径的计算方法

计算 l 为 $\frac{1}{R}$:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (110)$$

10.6.2 幂级数的运算性质

四则运算

若两个幂级数在同一收敛区间内收敛, 可逐项进行加减乘除 (乘法需卷积系数, 除法需递推求系数) .

TODO: 这个疑似可以记

一致收敛

幂级数在其收敛区间内任意闭区间上一致收敛.

连续性

和函数在 $(-R, R)$ 内连续, 若端点收敛, 则左/右连续.

10.6.3 幂级数的可积性与可微性

和函数在收敛区间内可积, 且可以逐项积分.

和函数在 $(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导.

10.6.4 Taylor 级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (111)$$

第十一章 广义积分与含参积分

考纲

1. 理解广义积分收敛与发散的概念。
2. 熟练掌握广义积分敛散性的判别方法。
3. 掌握广义积分的绝对收敛及条件收敛的判别方法,含参变量的正常积分与广义积分的性质和计算。

重点:

1. 广义积分的敛散性判别法。
2. 绝对收敛, 条件收敛及其判别方法, 含参变量的正常积分与广义积分的性质和计算。

难点:

1. 绝对收敛, 条件收敛及其判别方法, 含参变量的正常积分与广义积分的计算。

11.1 无穷积分与瑕积分

11.1.1 无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \quad (112)$$

无穷积分中的求极限运算可以提到积分号外, Eq. 112 中右侧有极限 $\Leftrightarrow$ 左侧收敛.

线性性质、区间可加性、换元积分法、分部积分法仍适用.

11.1.2 瑕积分

存在瑕点的积分, 被积函数在某一点或某些点处无界.

11.1.3 审敛法

柯西、比较原理、狄利克雷判别法、阿贝尔判别法.

11.2 含参变量的正常积分

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (113)$$

称为含参变量积分.

11.2.1 积分、极限的次序交换

只要 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 连续, 积分、极限之间就能交换次序.

11.2.2 积分下求导

只要 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 存在, 就能把求导操作移到积分号内.

变限积分情形

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx \\ g'(y) &= \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + (f(v(y), y)v'(y) - f(u(y), y)u'(y)) \end{aligned} \quad (114)$$

视作三元复合函数 $F(u(y), v(y), y)$ 链式法则分解.

11.3 含参变量的广义积分

TODO: 感觉和前面没什么不同, 广义积分还有一个重点是升维

11.4 Γ 和 B 函数

11.4.1 Γ 函数

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ (a > 0) \end{aligned} \quad (115)$$

性质

- 递推关系: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n!$

11.4.2 B 函数

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ (p, q > 0) \end{aligned} \quad (116)$$

性质

- 很容易发现对称性: $B(p, q) = B(q, p)$
- 与 Γ 函数关系: $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

可以用三角函数形式表示:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta \, d\theta \quad (117)$$

第十二章 傅里叶级数

考纲

1. 理解三角级数展开的意义和必要性、展开的条件以及展开的方法。
2. 熟练掌握函数展开为三角级数的条件和方法, 了解贝塞尔不等式及帕斯瓦尔等式的意义。

重点:

1. 熟练掌握函数展开为三角级数的条件和方法。

这里没有繁文缛节了, 按照考纲要求给出内容.

12.1 为什么要傅里叶展开

幂级数只能表示在某区间内无穷可导的函数, 适用范围有限.

现实中很多函数(如矩形波、锯齿波)在某些点不可导, 不能用幂级数表示.

傅里叶适合周期函数.

12.2 傅里叶展开条件与方法

12.2.1 傅里叶展开条件

函数 $f(x)$ 要满足:

- 周期性
- 在一个周期内有界可积, 但是不要求连续
- 保证级数收敛

下面着重说明第三点, 狄利克雷条件是傅里叶级数收敛的充分条件.

$f(x)$ 在一个周期内分段连续、分段单调, 则级数在连续点处收敛于 $f(x)$, 在间断点收敛于左右极限的平均值.

即傅里叶级数的和:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点} \end{cases} \quad (118)$$

12.2.2 傅里叶展开方法

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (119)$$

对于周期为 2π 的函数

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (120)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (121)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (122)$$

对于周期为 $2l$ 的函数

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \quad (123)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (124)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (125)$$

奇偶函数的简化

偶函数展开为余弦级数，奇函数展开为正弦级数。

12.3 贝塞尔不等式和帕塞瓦尔等式的意义

贝塞尔不等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (126)$$

物理意义：傅里叶展开项的平方和（即各“谐波”的能量）不会超过原函数的能量。

取样丢失了信息。

帕塞瓦尔等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (127)$$

理想的完整取样。