线性代数

最后编辑于 2025-03-09

目录

0 其他

代数基本定理

任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有 n 个复数根（重根视为多个根）.

立方和差公式

$$
\begin{aligned}
(A+B)^3 &= A^3 + A^2B + AB^2 + B^3 \\
(A-B)^3 &= A^3 - A^2B + AB^2 - B^3 \\
A^3 + B^3 &= (A+B)\left(A^2 - AB + B^2\right) \\
A^3 - B^3 &= (A-B)\left(A^2 + AB + B^2\right)
\end{aligned}
$$

1 行列式

1.1 二阶三阶行列式

对角法则

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3) \\
&\quad -(3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 6 \cdot 8)
\end{aligned}
$$

特例

上三角行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}
$$

下三角行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}
$$

对角型行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}
$$

即**上三角、下三角、对角型行列式**等价.

1.2 排列和逆序

排列

排列的定义：由 $1, 2, 3, \dots, n$ 组成的一个有序数组，叫做一个 n 级排列.

性质：n 级排列一共有 $n!$ 种，其中按顺序从小到大排列的叫标准排列或自然排列.

逆序

逆序的定义：在一个 n 级排列中，每有一组 (a_i, a_j) 不满足顺序关系，则构成一对逆序.

如有排列 $5,4,1,2,3$，其逆序数 $N(5,4,1,2,3) = 1+2+2+2 = 7$

```python
# 该算法需要O(n^2)时间，利用并归排序可以优化至O(nlogn)时间
def count_inversions(arr):
    count = 0
    n = len(arr)
    for i in range(1,n):
        for j in range(i):
            if arr[i] < arr[j]:
                count += 1
    return count
```

据排列 π 的逆序数的奇偶性，可以将 π 称作奇数列或偶数列.

对换

对换的定义：将排列中两个元素的顺序交换，得到另外一个排列.

性质：每次对换操作都会改变排列的奇偶性.

> 证明：
>
> 对于相邻的两个元素，它们对换并不改变其他元素的逆序关系，所以只是让逆序数 $+1$ 或 -1，即改变了奇偶性.
>
> 对于中间隔着 k 个元素的两元素对换，可以看作经过了 $2k-1$ 次相邻对换，即一定改变了奇偶性.
>
> 解释 **中间隔着 k 个元素的两元素对换，可以看作经过了 $2k-1$ 次相邻对换**： TO DO

推论：

- 奇排列对换成标准排列需要的次数为奇数，偶排列对换成标准排列需要的次数为偶数.
- n 级排列一共有 $n!$ 种，其中奇排列和偶排列各占 $\frac{n!}{2}$ 种.

1.3 n 阶行列式

n 阶行列式 = $n!$ 个乘积相加.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中 a_{ij} 称为行列式 D 的 (i,j) 元.

按行展开的定义

1. 行标取标准排列
2. 列标取排列的所有可能
3. 正负号由列标组成的排列的逆序数所决定：$(-1)^{N(j_1,j_2,\dots,j_n)}$
4. 不同行不同列取出 n 个元素相乘

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

按列展开的定义

1. 列标取标准排列
2. 行标取排列的所有可能
3. 正负号由行标组成的排列的逆序数所决定
4. 不同行不同列取出 n 个元素相乘

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

乱序的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma (-1)^{N(i_1 i_2 \dots i_n) + N(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$$

揭示了乘积前的正负号的决定：$(-1)^{N(行)+N(列)}$

推论

1. 如果行列式的某一行/列的值都是零，则这个行列式的值为零.
2. 三角形行列式的值等于主对角线上元的乘积.特别的，逆三角形行列式的值等于副对角线上元的乘积，正负号需要根据逆序数$N(D) = \frac{n(n-1)}{2}$讨论.

1.4 行列式的性质

转置

行列式 D 的转置记作 D^T.

简而言之：行变成列，列变成行 $a_{ij} \to a_{ji}$.

性质：$D = D^T$

对换行列式的行/列

对换行列式D_0的某两行/列，记作D_1，则有$D_1 = -D_0$

证明：所有排列的奇偶性发生改变，即正的变负的，负的变正的.

推论

如果行列式有两行/列完全相同，则其值为零.

数乘

如果用一个数去乘一个行列式，则等于用这个数去乘以行列式的某一行/列的所有元

e.g. $k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

推论

如果行列式有两行/列完全成比例，则其值为零.

行列式是可分解为两个数相加的

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+x & b+y \\ z & w \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ z & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

推论

把行列式的某一行乘以一个系数加到另外一行上，行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$$

1.5 行列式按某一行/列展开

余子式与代数余子式

a_{ij} 的余子式指的是 n 阶行列式 D 去掉第 i 行和第 j 列，产生的新 $n-1$ 阶行列式，记作 M_{ij} .

同时，我们把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称作代数余子式 A_{ij} .

利用代数余子式展开行列式

n 阶行列式按第 i 行展开：

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

同理我们也有按列展开，此处不再赘述.

此定理的意义是把高阶行列式转换为低阶行列式来计算.在计算行列式时，我们可以利用行列式的性质先将某一行/列的大部分化为 0,再按这一行/列展开行列式，减少计算量.

推论：异乘变零定理

$a_{j1}A_{i1} + \ldots + a_{jn}A_{in} = 0$

相应的元乘不属于这一行的代数余子式的结果一定为零.~~所以说 NTR 打咩.~~

1.6 行列式按多行/列展开（Laplace 展开）

k 阶子式的余子式和代数余子式

在 n 阶行列式中，取 k 行 k 列的元素标记.在交点处的元组成一个 k 阶子式 N，而未被标记的元素组成一个 $n-k$ 阶的余子式 M，代数余子式$A = (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}M$

在 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ 之中，取 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$ 为子式，

则对应的余子式为 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 16 \end{vmatrix}$，代数余子式为 $(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 16 \end{vmatrix}$.

Laplace 展开

在 n 阶行列式中，任取定 k 行，则由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式 $N_1, \ldots, N_t, (t = C_n^t)$ 与其对应的代数余子式 $A_1, \ldots, A_t$ 的乘积之和等于 D 的值.

$$D = N_1A_1 + \ldots + N_tD_t, t = C_n^t.$$

六个结论

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

其中 $det(A)$ 假设为 m 阶， $det(B)$ 假设为 n 阶.

相当于以块为单位的三角行列式.

1.7 Cramer ‘s Rule

用于求解 n 个方程解 n 个未知数的情况.

对于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解： $x_j = \frac{D_j}{D}$ ，其中 D_j 为 D 将第 j 列元素替换为 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 所得.

1.8 行列式的计算技巧

待补充，等我做点题先.

2 矩阵及其运算

2.1 矩阵的概念

由 $m \times n$ 个数组成的数表称为一个 $m \times n$ 矩阵$A_{m\times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵是一个数表，行列式是一个数.

同型矩阵：两个矩阵类型一致，都为 $m \times n$

矩阵相等：同型矩阵且对应元素相等.

列矩阵（列向量）： $n = 1$ 的矩阵，即向量，如$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$.

零矩阵：全部元素为零的矩阵，记作 O .

· 任意两个零矩阵**未必**相等.

负矩阵：对某一矩阵的全部元素取相反数的矩阵.

如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$是 $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ 的负矩阵.

方阵：$m = n$ 的矩阵，同时也只有方阵有主/副对角线.

- 特别地，$m = n = 1$ 的矩阵等价于 a_{11}.

上/下三角形矩阵：首先得是方阵，其定义与行列式的相似.

对角形矩阵：可表示为 $diag(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$

数量矩阵：主对角线上的元素为常数的对角形矩阵.

单位矩阵：常数为 1 的数量矩阵，记作 I_n 或 E.

2.2 矩阵的加法与数乘

矩阵加法

首先，必须是同型矩阵才能相加. 矩阵的加法满足交换律和结合律.

矩阵数乘

数 k 乘以一个矩阵 A，相当于用 k 乘以矩阵 A 的每一个元素.

<u>这一点与行列式很不一样.</u>

2.3 矩阵的乘法

最容易出错的地方.

设矩阵 $A_{p\times q}$ 和 $B_{m\times n}$.

只有当 A 的列数 q 等于 B 的行数 m 时，才能相乘.

相乘时，先固定 A 的行，取出行向量 $(1\ \ 2\ \ 3)$ 再依次切片 B 的列向量（一共有 B 的行数 m 个）相乘放置到结果的对应位置上.

$$(1\ \ 2\ \ 3) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 14$$

代码实现 $AB = C$:

```python
def matrix_multiply(A, B):
    # 获取矩阵 A 和 B 的维度
    p = len(A)        # A 的行数
    q = len(A[0])     # A 的列数
    m = len(B)        # B 的行数
    n = len(B[0])     # B 的列数

    # 检查矩阵 A 的列数是否等于矩阵 B 的行数
    if q != m:
        raise ValueError("矩阵 A 的列数必须等于矩阵 B 的行数")

    # 初始化结果矩阵 C，大小为 p x n
    C = [[0 for _ in range(n)] for _ in range(p)]

    # 进行矩阵乘法
    for i in range(p):            # 遍历 A 的行
        for j in range(n):        # 遍历 B 的列
            for k in range(q):    # 遍历 A 的列和 B 的行
                C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]
```

```
    return C
```

矩阵的乘法是有顺序性的.相当于两个线性变换的先后顺序，AB 是不等于 BA 的，甚至 BA 可能无意义.

矩阵的乘法满足结合律和分配律，不满足交换律.

结论:

- $AE = A, EA = A$，单位矩阵在乘法中相当于数乘 1.
  - 当 E 替换为 $diag(a, a, ..., a)$，相当于数乘 a.
- 两对角形相乘，相当于对应元素相乘.

$$diag(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot diag(b_1, b_2, ..., b_n) = diag(a_1b_1, a_2b_2, ..., a_nb_n)$$

2.4 方阵的幂

注意，矩阵中只有方阵有幂运算.

$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{\text{k}}$，特别地，我们规定 $A^0 = E$.

矩阵的幂运算与实数一致，唯一的区别是 $(AB)^n$ 不一定等于 A^nB^n.

若 $AB = BA$ 我们称 A 和 B 是可交换的，如 A 和 E.这时，我们可以按照实数相似的法则进行幂运算.

方阵多项式

若 $f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1x + a_0$ 则 $f(A) = a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + ... + a_1A + a_0A^0$.

2.5 矩阵的转置

性质:

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- <u>需要注意</u>$(AB)^T = B^TA^T$，推广：$(A_1A_2...A_m)^T = A_m^T + ... + A_2^T + A_1^T$.
- $\left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k$，转置和求幂在此是可互换顺序的.

对称矩阵

满足 $A^T = A$ 的矩阵，即 $a_{ij} = a_{ji}$.

性质:

- A^k 仍是对称矩阵
- 若 A 和 B 是同阶对称矩阵，则 AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$.
- 对任意矩阵 B，B^TB, BB^T 都是对称矩阵.

反对称矩阵

$A = -A^T$.

$a_{ij} = -a_{ji}$，同时主对角线的元素全为 0 的矩阵.

<u>对称矩阵的主对角线可以是任意数，但是反对称矩阵的主对角线元素必须全是 0.</u>

与对称矩阵不同的性质:

- 若 A 为反对称矩阵，$k \in \mathbb{Z}^+$ 则 A^k 为 $\begin{cases} \text{对称矩阵} & k\text{为偶数} \\ \text{反对称矩阵} & k\text{为奇数} \end{cases}$

2.6 方阵的行列式

方阵 A 的行列式记作 $Det(A)$，相当于经过某种运算后得到的属性.

性质:

- $|A| = |A^T|$
- 重要: $|kA| = k^n |A|$
- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- $|A^m| = |A|^m$
- $|E| = 1$

2.7 方阵的伴随矩阵

由行列式 A 各个元素的代数余子式 a_{ij} 所构成的矩阵称作矩阵 A 的伴随矩阵 A^*

性质:

1. $AA^* = A^*A = |A|E$，利用了异乘变零定理.
2. 若 A 为 n 阶方阵，则 $A^* = A^{n-1}$.
3. $\left(A^T\right)^* = (A^*)^T$
4. 若 A 为 n 阶方阵，则 $(kA)^* = k^{n-1}A^*$，对比 $|kA|^n = k^n |A|$.
5. 如果 A 是二阶方阵 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 则 $A^* = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$

2.8 逆矩阵

逆矩阵可以看作是矩阵的倒数，是唯一且非零的.

矩阵 B 是 A 的逆矩阵，如果 $AB = BA = E$，同时我们称 A 是可逆的.

奇异矩阵: $Det(A) = 0$ 的矩阵 A 称为奇异矩阵。

性质:

1. 如果 A 可逆，那么 $Det(A) \neq 0$.
2. 若 $|A| \neq 0$（即 A 为 非奇异矩阵） 则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

推论: 若 $AB = E$ 或者 $BA = E$ 则 $B = A^{-1}$

逆矩阵的重要推论

1. 若 A 可逆，则 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. 若 A 可逆则 A^T 可逆，同时 $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
4. 若 A 可逆则 A^* 可逆且 $(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^* = \frac{1}{|A|}A$
5. 若 A 和 B 为同阶可逆矩阵且 AB 可逆，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
6. 若 A 可逆，则 $A^m, m \in \mathbb{Z}^+$ 也可逆，且 $(A^m)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m$

矩阵方程

若 A, B 均为可逆矩阵，则矩阵方程：

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

利用 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$，在矩阵方程中，我们采取等号两边同时乘以一个矩阵的方法分离出 X，同时我们要区分左乘与右乘的区别，不能乱。

2.9 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换分为两类：行变换与列变换。

行变换：

1. 交换矩阵的两行
2. 某一行所有元素同时乘一个非零系数 k
3. 在 2 的基础上，将这行的元素加至另外一行

<u>矩阵的变换用“∼”或“→”连接，因为它们不相等.</u>

标准形矩阵

矩阵由 0 和 1 构成，且矩阵的左上角是一个单位矩阵，其他元素全为 0，如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>标准形矩阵不一定是方阵.</u>

任何矩阵 A 经过初等变化后都能化为标准形矩阵，并称此矩阵为 A 的标准形.

性质：标准形中 1 的个数等于矩阵的秩 $r(A)$.

行阶梯形矩阵

一个矩阵称为阶梯型（或行阶梯型），若它有以下三个性质：
1. 每一非零行都在每一零行之上
2. 某一行的首非零元所在的列位于前一行首非零元的右边
3. 某一首非零元所在列下方元素都是零

即：呈现左高右低的楼梯状，横线可跨多列，竖线只可跨一行.

行简化阶梯形矩阵

相对于行阶梯形矩阵多了两个限制条件：

1. 所有首非零元都是 1
2. 所有首非零元所在列，除去自己都为 0

矩阵 $\xrightarrow{\text{初等变换}}$ 行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{初等变换}}$ 行简化阶梯形矩阵.

如果只使用初等变换，A 的行阶梯形矩阵不唯一，但是行简化阶梯形矩阵唯一.

2.10 初等矩阵

由单位矩阵 E 经过一次初等变化得到的矩阵，有以下三种类型：
1. 交换矩阵的两行/列得到 $E(i, j)$
2. 某一行/列乘一个系数得到 $E(i(k))$

3. 把 $j(k)$ 加到 i 行/列上得到 $E(ij(k))$

前两种矩阵的行和列操作是等价的，但是第三种矩阵则不然，行变换和列变换得到的矩阵恰好是对方的转置。

性质：

1. $E(ij)=-1, E(j(k))=k, E(ij(l))=1$
   - 初等矩阵的行列式都不为 0，初等矩阵都可逆.
2. $E(ij)=(E(ij))^T, E(j(k))=(E(j(k)))^T, E(ij(k))=(E(ji(k)))^T$
   - 注意第三种情况.
3. $E(ij)=(E(ij))^{-1}, E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right), E(ij(l))^{-1}=E(ij(-l))$
   - 初等矩阵均可逆，且逆矩阵都为同种类型的初等矩阵.

初等矩阵与初等变换的关系
设 A 为 $m \times n$ 的矩阵，则

对 A 进行一次初等行变换得到的矩阵，等于用同等类型的 m 阶初等矩阵左乘 A. 对 A 进行一次初等列变换得到的矩阵，等于用同等类型的 n 阶初等矩阵右乘 A.

2.11 矩阵的等价

矩阵的关系一共有四种：等价、相似、正交相似和合同.

若矩阵 A 可以经由有限次数的初等变换得到 B 那么称它们等价，记作 $A \cong B$.

$$A \cong B \Leftrightarrow A \to B$$

等价的性质：

1. 反身性：$A \cong A$
2. 对称性：$B \cong A \Leftrightarrow A \cong B$
3. 传递性：$A \cong B, A \cong C \Rightarrow B \cong C$

推论：

1. 任何矩阵都与其标准形等价
2. $A \cong B$ 即为：

$$\begin{gathered} \exists P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \text{ 为初等矩阵}, s.t. \\ P_1 P_2 \ldots P_n A Q_1 Q_2 \ldots Q_n = B. \\ \Leftrightarrow \exists P, Q \text{ 为可逆矩阵}, s.t. \\ P_{m\times m} A_{m\times n} Q_{n\times n} = B_{m\times n}. \end{gathered}$$

3. 若 $A \cong B$ 则其标准形相同，故 $r(A)=r(B)$

4. 若 A, B 为同形矩阵，则 $A \cong B \Leftrightarrow r(A)=r(B)$

5. 若 A, B 为同阶矩阵，且 $A \cong B$ 那么 $\mathrm{Det}(A)=k\,\mathrm{Det}(B)$，此外， A, B 要么都可逆，要么都不可逆

6. 若 A 为 n 阶方阵，那么 $A \cong E \Leftrightarrow A$可逆

7. 若 A 为 n 阶方阵，那么 $A \cong E \Leftrightarrow A$可以表示为有限个初等矩阵的乘积

2.12 初等变换法的运用

在过去，我们学到两种求逆矩阵的方法：$A^{-1}=\frac{1}{\mathrm{Det}(A)}A^*, AA^{-1}=E$.

利用性质：

$$\exists P_1,...,P_n \text{ 为初等矩阵 } s.t.$$
$$P_1...P_nA = E \Rightarrow P_1...P_nE = A^{-1}.$$

对 A 和 E 做一样的初等行变换，前者得到 E 后者得到 A^{-1}.

初等行变换法求逆矩阵

1. 将 $A_{m\times n}, E_{m\times n}$ 拼接为 $(A \vdots E)_{m\times 2n}$

2. 对 $(A \vdots E)_{m\times 2n}$ 进行初等行变换化为行简化阶梯形矩阵 $(B \vdots D)_{m\times 2n}$

<u>只能行变换.</u>
<u>左乘初等矩阵是行变换，右乘初等矩阵是列变换.</u>

3.若 $B = E$ 则 A 可逆且 $A^{-1} = B$，反之则不可逆.

初等列变换法求解矩阵方程

对于 $AX = B$：

$$AP_1...P_n = E,$$
$$BP_1...P_n = X,$$
$$\text{则}\begin{pmatrix} A \\ ... \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E \\ ... \\ X \end{pmatrix}.$$

不要搞混左乘右乘与行列变换的关系.

2.13 分块矩阵

矩阵可以任意切块，将大矩阵的运算转化为小矩阵的运算，每一块叫 a_{ij}，<u>请不要与代数余子式混淆！</u>

特别地，如果按照行切割，我们得到 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 称为 A 的行向量组.

同样的，按列切割得到 $\beta_1,...,\beta_n$ 称为 A 的列向量组.

特殊的分块矩阵：分块上三角形、下三角形、对角形矩阵，其中对角线元素都是方阵.

加法：需要切成相同的块.

数乘：无变化.

矩阵的分块乘法

设 $A_{m\times l}, B_{l\times n}$ 确保 A 的列分块与 B 的行分块相同，即 A 对应块的列数等于 B 对应块的行数.

分块矩阵的转置

对整体进行先转置，而后再对每一个分块进行转置.

分块方阵的逆矩阵

设 A, B 为方阵，$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow A, B$ 可逆，且 $\left(\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$.

设 A, B 为方阵，$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow A, B$ 可逆，且 $\left(\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

若 $A_i, i = 1, 2, ..., n$ 是方阵，则 $diag(a_1, ..., a_n)$ 可逆 $\Leftrightarrow A_i, i = 1, 2, ..., n$ 可逆，且 $(diag(a_1, ..., a_n))^{-1} = diag\left(a_1^{-1}, ..., a_n^{-1}\right)$.

若 $A_i, i = 1, 2, ..., n$ 是方阵且可逆，则 $\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & a_n^{-1} \\ & \iddots & \\ a_1^{-1} & & \end{pmatrix}$.

1.14 矩阵的秩

矩阵的 k 阶子式

取矩阵 $A_{m\times n}$ 中 k 行 k 列 k^2 个交点元素，其中 $k \leq \min(m, n)$.

矩阵 A 中非零子式的最高阶数，称为矩阵 A 的秩，记作 $r(A)$.

非零矩阵的秩非零，且小于 $\min(m, n)$.

满秩矩阵

若矩阵 $A_{m\times n}$：

- $r(A) = m$ 称为行满秩
- $r(A) = n$ 称为列满秩
- $r(A) < \min(m, n)$ 称降秩矩阵

降秩矩阵 $\Leftrightarrow \det(A) = 0, A$ 不可逆且非奇异.

满秩矩阵 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0, A$ 可逆且奇异.

推论:

- $r(A) = r(-A) = r\left(A^{-1}\right) = r(kA)$.
- $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$.
- 若 A 为行阶梯形矩阵，则秩为非零行数.
- 若 $r(A) = 1$ 则 A 中任意两行成比例.
- 初等变换不改变矩阵的秩 $A \cong B \Rightarrow r(A) = r(B)$.
- 若 A, B 是同形矩阵，$A \cong B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$
- 若 A, B 是同为 $m \times n$ 矩阵，$r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$.
- 若 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$ 则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.
- $r(A) = r\left(AA^T\right) = r\left(A^T A\right) = r\left(A^T\right)$.
- 若 P, Q 为可逆方阵，则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$，因为可逆方阵可以看作一系列初等矩阵的乘积，它们并不改变矩阵的秩.
- 若 A 为 n 阶方阵，且 A^* 为其伴随矩阵，则：

$$r(A^*) = \begin{cases} n \text{ if } r(A) = n \\ 1 \text{ if } r(A) = n - 1 \\ 0 \text{ if } r(A) < n - 1 \end{cases}$$

3 向量

3.1 向量的概念与线性运算

向量可以看作特殊的矩阵.

零向量：所有分量都为 0 的向量.

负向量：所有分量都取某一向量分量的负的向量.

截短与接长

顾名思义，改变向量的维度.

3.2 向量的线性组合与线性表示

设 $a_i, i = 1, ..., m$ 是一组 n 维向量， $k_i, i = 1, ..., m$ 是一组常数，若：

$$\beta = k_1 a_1 + ... + k_m a_m$$

则称 β 为向量 $a_i, i = 1, ..., m$ 的线性组合， $k_i, i = 1, ..., m$ 为组合系数.

可以写成 $Ax = \beta$ 的形式， A 是由 $a_i, i = 1, ..., m$ 组成的矩阵， x 是由 $k_i, i = 1, ..., m$ 组成的向量.

3.3 线性相关

对于 $a_1, ..., a_n$ 若存在不全为零的数 $k_1, ..., k_n$ 满足：

$$a_1 k_1 + ... + a_n k_n = 0$$

则称 $a_1, ..., a_n$ 线性相关.

推论：

- a, b 线性相关 $\Leftrightarrow a, b$ 成比例.
- 若向量组中有一部分线性相关，则该向量组线性相关.
- 向量组线性无关，则向量组中任一部分线性无关.
- 若向量组中含有零向量，则它一定线性相关.
- 若 $a_1, ..., a_n$ 线性无关，则其接长后的新向量组也线性无关.

若 $a_1, ..., a_n$ 线性无关，此时添加向量 β 使得 $a_1, ..., a_n, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $a_1, ..., a_n$ 线性表示，且表示方法唯一.

替换定理

设向量组 ① : $\alpha_1, ..., \alpha_r$, ② : $\beta_1, ..., \beta_s$

若 ① 线性无关，且可以由 ② 线性表示，则 $r \leq s$.

逆否命题：

若 $r \geq s$ 则 ① 线性相关.

推论：若向量组所含的个数大于向量的维数，那么它一定线性相关.

3.4 向量组的等价

设向量组 ① : $\alpha_1, ..., \alpha_r$, ② : $\beta_1, ..., \beta_s$

若 ① 中元素都可以由 ② 线性表示且② 中元素都可以由 ① 线性表示，则称 ① 和 ② 等价.

等价的性质：

1. 反身性
2. 对称性
3. 传递性

3.5 极大线性无关组

如果向量组 ① : $\alpha_1, ..., \alpha_r$ 部分元素 $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_s}$ 满足：

$\alpha_1,...,\alpha_r$ 线性无关

$\alpha_1,...,\alpha_r$ 中任意向量都可以使用 $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_s}$ 线性表示

则称 $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_s}$ 为 $\alpha_1,...,\alpha_r$ 的一个极大线性无关组.

零向量组没有极大线性无关组，线性无关的向量组的极大线性无关组是它本身.

极大线性无关组可能不唯一，但是极大线性无关组所含元素个数一定相等.

推论：向量组与其极大线性无关组等价.

若 ① 中元素都可以由 ② 线性表示则 ① 可以由 ② 的极大线性无关组线性表示.

用初等变换求极大线性无关组

行变换不改变列向量的关系，列变换不改变行向量的关系.

将向量组写成矩阵的形式，然后通过不改变向量间关系的初等变换（行变换）化为行简化阶梯形，如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c & d \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}$，改写为线性组合：

$$\begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.6 向量组的秩

向量组的极大线性无关组所含元素个数称为秩.

$$0 \le r(a_1,...,a_n) \le n$$

$r(a_1,...,a_n)$ 一定小于等于 $\min\{n,m\}$，m是向量的维数.

（与替换定理相结合）若向量组 ① 可以由 ② 线性表示，则 $r(①) \le r(②)$.

矩阵的行秩与列秩

将矩阵看作行向量组与列向量组，对其求秩.

结论：矩阵 A 的行秩与列秩相等，都等于 $r(A)$.

求向量组的秩可以直接化为矩阵，通过初等行变换得到行阶梯形矩阵，有几个非零行，它的秩就是几.

4 线性方程组

4.1 线性方程组的表示法

n 个未知数，m 个方程的方程组，记为 $(*)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & .... & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$，增广矩阵为 $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (A \;\; b)$.

也可以写成矩阵相乘的形式：

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \dots\\ b_m\end{pmatrix}$$

即求解 $Ax=b$ 的方程.

当 $\begin{pmatrix}b_1\\ \dots\\ b_m\end{pmatrix}\neq O$ 则称 $(*)$ 是一个非齐次线性方程组，反之则称其为齐次线性方程组，即 $Ax=0$.

通过初等变换将 $Ax=b$ 变换为 $Ax=0$ 称后者为前者的导出组.

4.2 线性方程组解的判定

n 元非齐次线性方程组的解的判定:

先将增广矩阵化为行阶梯形矩阵，求出 $r(A)$ 和 $r(\bar{A})$.

无解	$r(A)\neq r(\bar{A})$
有解	$r(A)=r(\bar{A})$
有唯一解	$r(A)=r(\bar{A})=n$
有无穷解	$r(A)=r(\bar{A})<n$

4.3 线性方程组解的性质

性质 1：若 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=b$ 的解，那么 $\xi_1+\xi_2$ 也是$Ax=b$ 的解.

性质 2：若 ξ 是 $Ax=0$ 的解，那么 $\forall k\in\mathbb{R},k\xi$ 是 $Ax=0$ 的解.

性质 3：若 $\xi_i,i=1,2,\dots,n$ 为 $Ax=0$ 的解，那么它们的线性组合也是 $Ax=0$ 的解.

性质 4: 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是 $Ax=b$ 的任意两个解，则 $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 为对应导出组 $Ax=0$ 的解，利用了简单的相加相减.

性质 5：若 η^* 是 $Ax=b$ 的一个解， ξ 是导出组的解，那么 $Ax=b$ 的任意解可以表示为 $\eta^*+\xi$.

4.4 齐次线性方程组的基础解系

齐次线性方程组的情况只有两种：只有零解（平凡解）或有非零解（无穷多解，因为若 $Ax=b$ 则 $Akx=b$）.

基础解系：可以表示所有解的有限个解.

定义：设 $\xi_1,\dots,\xi_s$ 为 $Ax=b$ 的解向量，若:

$$\begin{aligned}&(1)\xi_1,\dots,\xi_s \text{ 线性无关}\\ &(2)Ax=b \text{ 的任意解向量都可以用 } \xi_1,\dots,\xi_s \text{ 表示}\end{aligned}$$

则称 $\xi_1,\dots,\xi_s$ 为 $Ax=b$ 的基础解系.

与极大线性无关组的概念是一样的，<u>所以基础解系的向量个数是 $n-r(A)$ 个.</u>

求齐次线性方程组的基础解系

将系数矩阵行变换为行简化阶梯形矩阵.

TODO 还是有点懵，日后再细化

4.5 线性方程组的求解

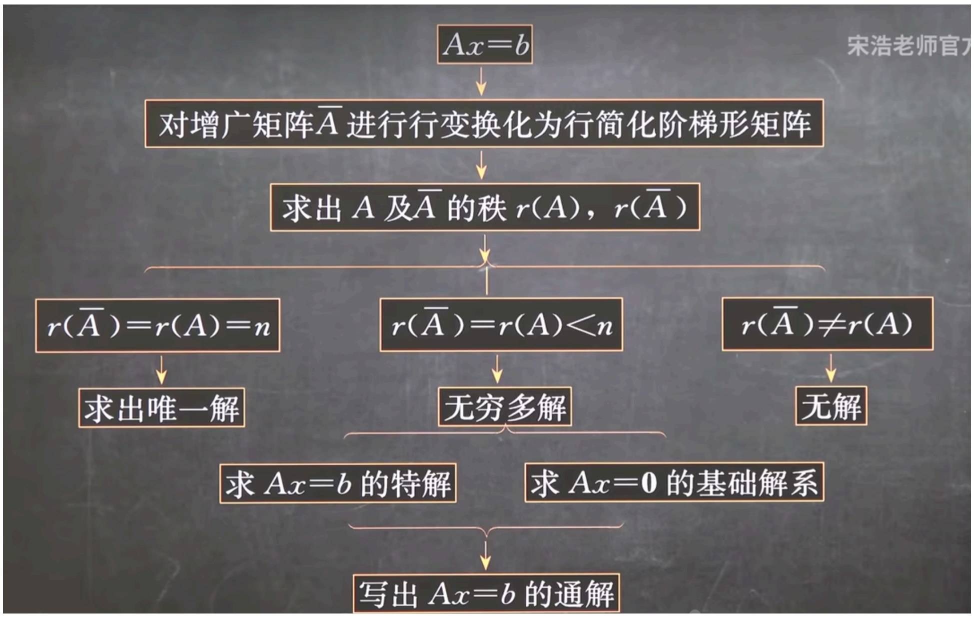
齐次线性方程组的求解

1. 将系数矩阵行变换为行简化阶梯形矩阵并求秩.
2. 通过秩的情况判断解的情况.若有无穷解，那么接下来求基础解系.
3. 根据解的结构，写出通解.

非齐次线性方程组的求解

1. 将增广矩阵变换为行简化阶梯形矩阵，并求 $A, \bar{A}$ 的秩.

2. 进行判断



接下来的步骤

TODO:https://www.bilibili.com/video/BV1h7pteyEww?p=36

5 特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量的定义与关系

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

即方阵乘以特征向量等于特征值乘以特征向量.

我们规定特征向量是非零向量.

性质

1. 若 α 是矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量，那么 $k\alpha(k \neq 0)$ 也是矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

2.若 α_1, α_2 是矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量，那么线性组合 $k_1\alpha + k_2\alpha_2 \neq 0$ 也是矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

3. 给定方阵 A，特征向量 α 只属于一个特征值.

5.2 特征值与特征向量的求法

$$A\alpha = \lambda\alpha$$
$$A\alpha - \lambda E\alpha = 0$$
$$(A - \lambda E)\alpha = 0$$

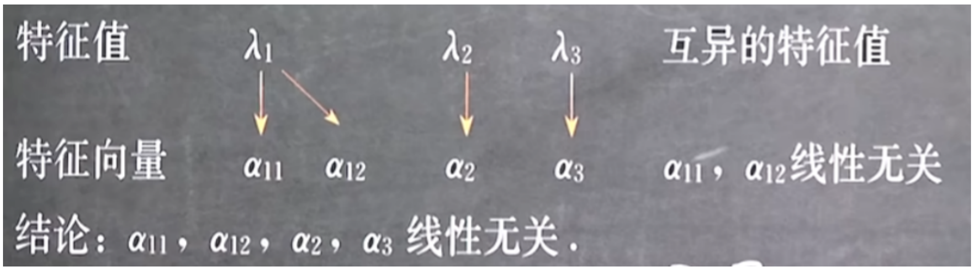
即 $(A-\lambda E)\alpha = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A-\lambda E) = 0$ 求出特征值 λ.

5.3 特征值与特征向量的性质

1. 由代数基本定理推导， n 阶方阵 A 在复数域中有 n 个特征值.
2. n 阶方阵 A, A^T 有着相同的特征多项式，进而有相同的特征值，<u>但是特征向量一般不同.</u>
3. 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, ..., \lambda_n$，则:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = a_{11} + a(22) + ... + a_{nn}$$
$$\lambda_1\lambda_2...\lambda_n = \mathrm{Det}(A)$$

4. n 阶方阵 A 的不同特征值对应的特征向量线性无关.



5. 若 λ 是 A 的 n 重特征根，则 A 的对应于 λ 的线性无关的特征向量的个数不超过 k 个；若 λ 是 A 的 单特征值，则 A 对应于 λ 的线性无关的特征向量有且仅有一个.

A	A^m	kA	$A+E$	$f(A)$	$A^2+2A+3E$	A^{-1}	A^*
λ	λ^m	$k\lambda$	$\lambda+1$	$f(\lambda)$	$\lambda^2+2\lambda+3$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\mathrm{Det}(A)}{\lambda}$
α	α	α	α	α	α	α	α

推论：若 λ 是 A 的特征值，$f(x)$ 为一个多项式且 $f(A) = O$，则 $f(\lambda) = 0$.

6. 若 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 且 $r(A) = 1$，则 A 的特征值 $\lambda_1 = \mathrm{tr}(A), \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

其中矩阵的迹 $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ 即对角线元素之和.

5.4 相似矩阵的概念与性质

设 A 和 B 都是 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$ 则称 A, B 相似，记作 $A \sim B$.

特别地，如果 A 与对角形矩阵相似则称 A 是可对角化的.

与等价的定义对比：对同型矩阵 $A, B, \exists$ 可逆矩阵 $PQ, s.t. PAQ = B$.

相似可以推出等价.

相似也有:
1. 反身性
2. 对称性
3. 传递性

若 $A \sim B$ 可以推出:

1. $r(A) = r(B)$
2. 若 $A \sim B$，则 A 与 B 具有相同的特征行列式，即 $\mathrm{Det}(\lambda E - A) = \mathrm{Det}(\lambda E - B)$，从而有相同的特征值.
3. $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B), \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$
4. $A^m \sim B^m$
5. $A^T \sim B^T$

若 $A \sim B$ 且都可逆可以推出:

1. $A^{-1} \sim B^{-1}$
2. $A^* \sim B^*$

从母公式：$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} A^*$ 推导.

5.5 矩阵的对角化

1. n 阶矩阵可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

2. 若 n 阶矩阵有 n 个互异的特征值，则 A 可对角化.

TODO

5.6 内积与正交

内积：$\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2), (\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

正交就是垂直.

正交向量组必定线性无关.

施密特正交化

（一般最多考到三个向量）设 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 线性无关，令:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1
\end{aligned}$$

再将 $\beta_1, ..., \beta_n$ 单位化为 $\gamma_1, ..., \gamma_n$.

推论:

1. 如果 A 是正交矩阵，则 A^T, A^{-1}, A^* 也是正交矩阵.

2. 若 A, B 均为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵.

3. 保内积性：若 A 为正交矩阵，则 $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$.

4. 保长度性：若 A 为正交矩阵，则 $|A\alpha| = \alpha$.

5. A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组为单位正交向量组.

5.7 实对称矩阵的相似对角化

设 A, B 为两个 n 阶方阵，如果存在一个正交矩阵 Q 使得:

$$Q^{-1} A Q = B$$

则称 A 与 B 正交相似.

实对称矩阵的特征值均为实数，特征向量均为实向量.

实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交.

TODO

6 二次型

6.1 二次型及其矩阵表示

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是一个二元，只有二次项的多项式.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

规则:

1. 平方项写在主对角线
2. 交叉项对半分到两边

二次型的标准形：不含交叉项 标准形的规范形：系数只能是：$-1, 0, 1$

二次型的惯性指数与符号差

标准形中正系数个数叫正惯性指数 p，负系数个数叫负惯性指数 q， 符号差 $p - q$.

二次型的秩等于 $p + q$.

线性变化

略

二次型经过可逆线性变化得到的仍然是二次型且秩不变.

合同矩阵与合同变换

设 A, B 为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 C 使得 $C^T AC = B$ 则称 A 与 B 合同，记作 $A \simeq B$.

称这个过程叫合同变化.

TODO

6.2 二次型与对称矩阵的有定性

设 n 元二次型 $f(x) = x^T Ax\left(A^T = A\right)$ 如果对于任意非零列向量 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \neq 0$ 恒有 $f(x) = x^T Ax > 0$ 则称 $f(x)$ 为正定二次型，称对称矩阵 A 为正定矩阵.

反之，则称负.能取 0 则称半.